



УДК 532.517

## ОПТИМИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕТЯЩЕГО СТЕРЖНЯ

Copyright © 1999, О. Н. Кириллов

Рассматривается стержень переменного сечения, движущийся в плоскости под действием следящей силы, приложенной к концу стержня. Требуется максимизировать критическое значение следящей силы, вызывающее статическую или динамическую потерю устойчивости. Управляющими функциями являются распределение массы и жесткости стержня или распределение массы несомого стержнем груза. Сначала ищется оптимальное распределение массы и жесткости стержня, поперечные сечения которого являются геометрически подобными фигурами, при неизменной полной массе материала. Получено распределение массы стержня, приводящее к существенному увеличению критической силы. Затем рассматривается задача об оптимальном распределении заданной неконструктивной массы вдоль стержня постоянного поперечного сечения, так чтобы масса груза, приходящаяся на единицу длины стержня, не превосходила заданной величины. При помощи принципа максимума Л. С. Понtryagina показано, что оптимальные решения реализуются в классе релейных функций. Приведены решения с двумя и четырьмя точками переключения. Рассмотрен также случай, когда вся неконструктивная масса сосредоточена в одной точке. Построены и проанализированы области устойчивости ■

### О. Н. Кириллов

аспирант Московского  
государственного университета

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., проф. А. П. Сейранян

Oleg N. Kirillov

### Optimization of Stability of the Flying Bar

A non-uniform bar moving in space under a tangential end force is considered. It is supposed that the bar can carry a nonstructural mass (a payload). This nonconservative system can lose stability by flutter or by divergence under certain conditions. Changing mass and/or stiffness distribution of the bar or nonstructural mass distribution we can influence the critical end force. Two optimization problems with critical follower load as a merit functional are studied, mass distributions of the bar and payload being taken as control functions. First we consider a bar without nonstructural mass. It is supposed that cross-sections of the bar are similar geometric figures and that the total mass of the bar is constant. It is necessary to find a mass distribution of the bar maximizing critical follower force. The mass distribution which significantly improves stability characteristics of the bar is obtained. Then a uniform bar carrying nonstructural mass is considered. We would like to maximize critical end force under the condition of total mass of the payload, assuming that admissible nonstructural mass distribution is a bounded function. With the use of Pontryagin's maximum principle it is shown that the optimal nonstructural mass distributions belong to the "bang-bang" type. Optimal solutions with two and four switching points are found. The problem of optimal displacement of a concentrated mass along the uniform bar is also considered. It is shown that the optimal solution is attained at the singularity of a boundary of the stability domain ■

### Введение

Устойчивость гибкой ракеты, движущейся под действием реактивной тяги, впервые исследовали К. Н. Гопак [1], В. И. Феодосьев [2], Т. Р. Beal [3] и О. А. Горошко [4]. Механической моделью в этих работах служит упругий стержень постоянного сечения, движущийся в плоскости под действием следящей силы, приложенной к концу стержня. Исследование устойчивости этой неконсервативной системы приводит к задаче на собственные значения, записанной в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} u'''' + p((1-x)u')' - \omega^2 u &= 0, \\ u''|_{x=0} &= 0, \quad u'''|_{x=0} = 0, \\ u''|_{x=1} &= 0, \quad u'''|_{x=1} = 0. \end{aligned} \tag{*}$$

Здесь  $u$  — прогиб стержня,  $\omega$  — частота изгибных колебаний,  $x \in [0, 1]$  — лагранжева координата, отсчитываемая от точки приложения следящей силы  $p$ , а штрихом обозначена операция дифференцирования по  $x$ .

Собственные значения  $\omega^2$  задачи (\*) меняются с увеличением параметра  $p$ . Потере устойчивости стержня соответствует значение  $p = p_*$ , при котором впервые происходит слияние двух собственных чисел, либо одно из собственных чисел проходит через ноль. В зависимости от того, какое из этих событий происходит

раньше, потеря устойчивости может быть динамической  $p_* = p_*^{\text{dyn}}$  (слияние), либо статической  $p_* = p_*^{\text{stat}}$  (обращение в ноль).

Как показано в [2], стержень постоянного поперечного сечения теряет устойчивость динамически ( $p_* = p_*^{\text{dyn}}$ ), когда происходит слияние двух низших частот изгибных колебаний.

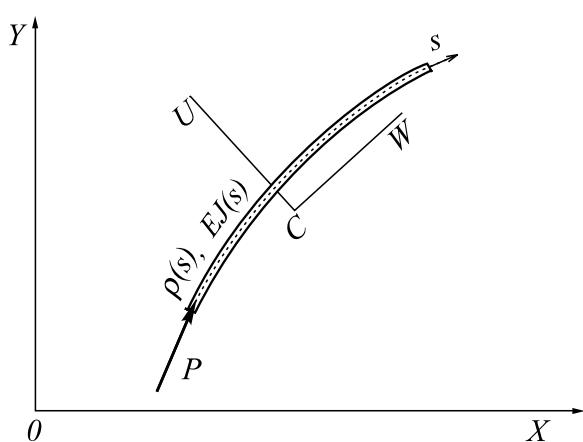
Тип потери устойчивости и критическое значение  $p_*$  следящей силы зависят от распределений массы и изгибной жесткости стержня. Кроме того, если стержень несет неконструктивную (т. е. не влияющую на жесткость) массу, то ее распределение вдоль стержня также влияет на критическое значение параметра  $p$  и тип потери устойчивости. Варьируя распределения массы и жесткости стержня или распределение неконструктивной массы, можно добиться более высоких значений критической силы (т. е. наименьшего из значений  $p_*^{\text{dyn}}$  и  $p_*^{\text{stat}}$ ).

В работах [5, 6] рассматривалась задача об оптимальном распределении груза заданной массы вдоль стержня постоянного сечения. В случае, когда весь груз сосредоточен в одной точке, в [6] найдено ее оптимальное расположение на стержне. Необходимо отметить, что авторы [6] следили за поведением лишь первых двух частот изгибных колебаний. Однако в задачах оптимизации конструкций оптимальные решения часто достигаются в особых точках границы области устойчивости, связанных с собственными значениями, кратность которых  $\geq 2$ , поэтому полученные результаты вызывают сомнения. В [5] решение той же задачи строилось на анализе частотного уравнения второго порядка, полученного с использованием метода Бубнова – Галеркина. При этом автор [5] ограничился лишь двумя членами в разложениях собственных функций задачи.

В [5] также решалась задача об оптимальном распределении груза заданной массы вдоль стержня. При этом ограничений на погонную плотность неконструктивной массы не вводилось. В данной работе показано, что при наличии таких ограничений оптимальные решения реализуются в классе релейных функций.

В настоящей работе исследуются две задачи оптимизации. Функционалом качества, который требуется максимизировать, является критическое значение следящей силы, вызывающее статическую или динамическую потерю устойчивости. В первой задаче ищется оптимальное распределение массы и жесткости стержня, поперечные сечения которого представляют собой геометрически подобные фигуры, при неизменной полной массе материала. Второй рассматривается задача об оптимальном распределении заданной неконструктивной массы вдоль стержня постоянного поперечного сечения. При этом требуется, чтобы масса груза, приходящаяся на единицу длины стержня, не превосходила заданной величины. Отдельно исследуется задача об оптимальном расположении точечной массы на стержне постоянного поперечного сечения.

## 1. Постановка задачи



**Рис. 1** К постановке задачи.

Рассмотрим стержень, движущийся в плоскости под действием следящей силы  $P$  (рис. 1). Изгибная жесткость  $EJ(s)$  и погонная плотность  $\rho_b(s)$  стержня являются функциями лагранжевой координаты  $s$ , изменяющейся от 0 до  $l$ , где  $l$  — длина стержня. Здесь  $E$  — модуль Юнга материала стержня,  $J(s)$  — момент инерции поперечного сечения. Предполагается, что стержень может нести груз массы  $M_{nm}$  с погонной плотностью  $\rho_{nm}(s)$  (неконструктивную массу). Если обозначить через  $M_b$  массу материала стержня, то полная масса системы будет равна

$$M = M_b + M_{nm} = \int_0^l \rho(\xi) d\xi, \quad \rho(s) = \rho_b(s) + \rho_{nm}(s).$$

Пусть  $OXY$  — инерциальная система координат. Введем в рассмотрение подвижную систему координат  $CWU$  с началом в центре масс конструкции (рис. 1). Направления осей  $W$  и  $U$  в каждый момент времени совпадают с направлениями главных осей инерции механической системы, состоящей из упругого стержня и несомого им груза, в деформированном состоянии. Линеаризованные уравнения движения, записанные в неинерциальной системе координат  $CWU$ , выведены в [4]. Так как для тонких стержней частоты продольных

колебаний значительно превосходят частоты изгибных колебаний, то распределение продольных сжимающих усилий можно считать стационарным. Тогда, как показано в [4], поперечные колебания стержня описываются следующим уравнением и граничными условиями

$$\rho \ddot{U} + \frac{P}{M} \left( U' \int_s^l \rho(s) ds \right) + (EJU'')'' = -\frac{\rho P}{I_0} (s_0 U'(0, t) + U(0, t))(s - s_0) - \frac{\rho}{M} U'(0, t) P, \quad (1.1)$$

$$EJU''|_{s=0,l} = 0, \quad (EJU'')'|_{s=0,l} = 0.$$

Здесь  $I_0$  — момент инерции конструкции относительно оси, перпендикулярной плоскости колебаний,  $U(s, t)$  — прогиб стержня,  $s_0$  — координата центра масс, штрихом обозначено дифференцирование по  $s$ , а точкой — дифференцирование по времени  $t$ .

Положив в (1.1)  $U(s, t) = U(s) \exp(i \Omega t)$ , где  $\Omega$  — частота изгибных колебаний стержня, можно получить неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Формы собственных колебаний с точностью до сдвига как целого и поворота определяются из решения однородного уравнения с граничными условиями [4]

$$\rho \Omega^2 U - (Q(s)U')' + (EJU'')'' = 0, \quad EJU''|_{s=0,l} = 0, \quad (EJU'')'|_{s=0,l} = 0, \quad (1.2)$$

$$Q(s) = -\frac{P}{M} \int_s^l \rho(\xi) d\xi.$$

Введем безразмерные переменные

$$u = \frac{U}{l}, \quad x = \frac{s}{l}, \quad m = m_b + m_{nm} = \frac{\rho}{M_b} l, \quad p = \frac{Pl^2}{EJ_*}, \quad \omega^2 = \frac{M_b \Omega^2 l^3}{EJ_*}, \quad (1.3)$$

где  $J_*$  — момент инерции некоторого фиксированного сечения стержня, например, основания. С использованием (1.3) и (1.2) получим обезразмеренные уравнение и граничные условия задачи на собственные значения

$$\begin{aligned} (\sigma(x)u'')'' &= p \frac{M_b}{M} \left( u' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' - m \omega^2 u = 0, \\ \sigma(x)u''|_{x=0}, \quad (\sigma(x)u'')'|_{x=0}, \\ \sigma(x)u''|_{x=1}, \quad (\sigma(x)u'')'|_{x=1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если форма поперечного сечения стержня постоянна, то безразмерная изгибная жесткость  $\sigma(x) \equiv 1$ . В случае, когда поперечные сечения являются геометрически подобными основанию стержня,  $\sigma(x)$  и безразмерная погонная масса стержня  $m_b(x)$  связаны соотношением  $\sigma(x) = m_b^2(x)$ . Для простоты далее будем рассматривать стержень только круглого сечения.

## 2. Задача об оптимальной форме стержня

### 2.1. Формулировка задачи оптимизации

Рассмотрим стержень с геометрически подобными поперечными сечениями, не несущий неконструктивную массу  $m_{nm}$ . Положив в (1.4)  $\sigma(x) = m^2(x)$ , где  $m(x) = m_b(x)$ , приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$\begin{aligned} Lu &= (m^2 u'')'' + p \left( u' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' - m \omega^2 u = 0, \\ m^2 u''|_{x=0}, \quad (m^2 u'')'|_{x=0}, \\ m^2 u''|_{x=1}, \quad (m^2 u'')'|_{x=1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Параметр  $p$  характеризует сжимающую следящую силу и поэтому не может принимать отрицательные значения. При  $p = 0$  в силу самосопряженности задачи все собственные значения  $\omega^2$ , отвечающие изгибным колебаниям, являются вещественными и положительными, так как по смыслу задачи  $m(x) > 0$ .

Для заданного распределения  $m(x)$ , решая задачу на собственные значения (2.1) при различных значениях  $p \geq 0$ , можно построить зависимости  $\omega_j^2(p)$  для нескольких первых собственных частот. Если при некотором значении  $p_*^{\text{stat}}$  одна из собственных частот  $\omega_j^2$  обращается в нуль, это означает статическую неустойчивость прямолинейной формы стержня (дивергенция). Слияние любых двух частот  $\omega_j^2 = \omega_k^2$  ( $j \neq k$ ) при некотором значении  $p_*^{\text{dyn}}$  приводит к динамической потере устойчивости стержня (флэттер). Критическая нагрузка  $p_*$  для данного  $m(x)$  есть наименьшее из значений  $p_*^{\text{dyn}}$  и  $p_*^{\text{stat}}$ . В зависимости от распределения массы стержня тип потери устойчивости и значение критической нагрузки изменяются. Для системы, описываемой уравнениями (2.1), будем искать распределение массы  $m(x) > 0$ , максимизирующее функционал критической нагрузки  $p_*(m)$  при изопериметрическом ограничении  $\int_0^1 m dx = 1$ :

$$\begin{aligned} p_*(m) &\rightarrow \max_{m \in \Omega}, \\ \Omega &= \left\{ m(x) : \int_0^1 m dx, m(x) > 0, x \in [0, 1] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Полагая в (2.1)  $m = m(x) + \delta m(x)$  и считая, что вариации  $\delta m(x)$  соответствуют приращения  $\delta p_*$ ,  $\delta u_*$  и  $\delta \omega_*$  критической нагрузки, собственных функций и собственных частот, можно найти связь между  $\delta m(x)$  и  $\delta p_*$  вида  $\delta p_* = \int_0^1 g(x) \delta m(x) dx$ . Функция  $g(x)$  является градиентом функционала критической нагрузки по отношению к вариациям распределения массы стержня. Выражения для  $g(x)$  различны в случае  $p_* = p_*^{\text{stat}}$  и в случае  $p_* = p_*^{\text{dyn}}$ . Текущее значение  $p_*$  можно увеличить, задавая функцию вариации  $\delta m(x)$  так, чтобы  $\delta p_* > 0$ . При этом необходимо, чтобы для нового распределения массы  $m = m(x) + \delta m(x)$  по-прежнему выполнялось изопериметрическое условие  $\int_0^1 (m(x) + \delta m(x)) dx = 1$ . На каждом шаге процесса оптимизации либо  $p_* = p_*^{\text{stat}}$ , либо  $p_* = p_*^{\text{dyn}}$ , и в вычислениях следует пользоваться соответствующим выражением для градиента.

## 2.2. Градиент функционала критической нагрузки

Для того чтобы получить явные выражения для функции градиента  $g(x)$ , необходимо рассмотреть сопряженную к (2.1) задачу на собственные значения, определяемую равенством  $\int_0^1 (L^* v) u dx = \int_0^1 v (Lu) dx$ :

$$\begin{aligned} L^* v &= (m^2 v'')'' + p \left( v' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' - m \omega^2 v = 0, \\ (m^2 v'' + p v)|_{x=0} &= 0, \quad (m^2 v'' + p v)'|_{x=0} = 0, \\ m^2 v''|_{x=1} &= 0, \quad (m^2 v'')'|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ниже будет показано, что для вычисления градиента требуется знать лишь решения задач на собственные значения (2.1) и (2.3) в критической точке.

Сначала рассмотрим случай  $p_* = p_*^{\text{dyn}}$ . Точке флаттера соответствует двукратное собственное значение  $\omega_*^2$  с собственными функциями  $u_*$ ,  $v_*$  задач (2.1) и (2.3).

Следуя [9, 10], придадим функции  $m(x)$  приращение  $\delta m(x)$ . Тогда критическое значение параметра нагрузки  $p_*$ , частота потери устойчивости  $\omega_*$  и собственная функция  $u_*$  получат приращения  $\delta p_*$ ,  $\delta \omega_*$  и  $\delta u_*$ . Из уравнений (2.1) получим уравнение и граничные условия в вариациях

$$\begin{aligned} \delta(Lu_*) &= L \delta u_* - 2\omega_* \delta \omega_* m u_* + (2m \delta m u_*'')'' - \omega_*^2 \delta m u_* + \\ &+ \delta p_* \left( u_*' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' + p_* \left( u_*' \int_x^1 \delta m(\xi) d\xi \right)' = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (2m \delta m u_*'' + m^2 \delta u_*'')|_{x=0} &= 0, \quad (2m \delta m u_*'' + m^2 \delta u_*'')'|_{x=0} = 0, \\ (2m \delta m u_*'' + m^2 \delta u_*'')|_{x=1} &= 0, \quad (2m \delta m u_*'' + m^2 \delta u_*'')'|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

После умножения (2.4) слева на  $v_*$  и интегрирования получившегося выражения от 0 до 1 с учетом (2.3)

получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_* \delta(Lu_*) dx &= v_* (m^2 \delta u''_*)' \Big|_0^1 - v_* (m^2 \delta u''_*) \Big|_0^1 + v_* (2m \delta m u''_*)' \Big|_0^1 - v'_* (2m \delta m u''_*) \Big|_0^1 - \\ &- 2\omega_* \delta \omega_* + \int_0^1 m u_* v_* dx + \int_0^1 \left( \delta m (2m u''_* v''_* - \omega_*^2 u_* v_* - p_* v_* u'_*) + \right. \\ &\quad \left. + p_* v_* u''_* \int_x^1 \delta m(\xi) d\xi + \delta p_* v_* \left( u'_* \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' \right) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Первые четыре неинтегральных слагаемых обращаются в нуль в силу граничных условий в вариациях (2.5). Покажем, что пятое слагаемое в (2.6) также исчезает.

Пусть  $\omega_i^2, u_i$  — собственное значение и собственный вектор задачи (2.1), а  $\omega_j^2, v_j$  — собственное значение и собственный вектор сопряженной задачи (2.3). Проинтегрируем по частям равенства

$$\int_0^1 v_j(x) Lu_i(x) dx = 0, \quad \int_0^1 u_i(x) L^* v_j(x) dx = 0$$

и возьмем их разность, учитывая граничные условия задач (2.1) и (2.3). В результате приедем к соотношению  $(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^1 m u_i v_j dx = 0$ , которое при  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$  выражает биортогональность собственных функций исходной и сопряженной задач на собственные значения. Если  $\omega_i^2$  и  $\omega_j^2$  при изменении  $p$  сближаются и при  $p = p_*$  сливаются с образованием двукратного собственного числа, то из непрерывной зависимости собственных функций от параметра  $p$  следует условие [9]

$$\int_0^1 m u_* v_* dx = 0. \quad (2.7)$$

Заметим, что поскольку  $\int_0^1 m u_* v_* dx \neq 0$  для произвольного простого собственного числа  $\omega_i^2$  с собственными векторами  $u_i, v_i$ , то (2.7) можно принять за условие динамической потери устойчивости.

Слагаемое  $\int_0^1 p_* v_* u''_* \int_x^1 \delta m(\xi) d\xi dx$  в (2.6) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_* v_* u''_* \int_x^1 \delta m(\xi) d\xi dx &= \int_0^1 \delta m(x) p_* \int_0^x v_* u''_* d\xi dx = \\ &= \int_0^1 \delta m(x) \left( p_* v_*(x) u'_*(x) - p_* v_*(0) u'_*(0) - p_* \int_0^x v'_* u'_* d\xi \right) dx. \end{aligned}$$

В итоге из (2.6) следует соотношение между  $\delta p_*$  и  $\delta m$

$$\int_0^1 v_* \delta(Lu_*) dx = \int_0^1 \left( 2m u''_* v''_* - \omega_*^2 u_* v_* - p_* v_*(0) u'_*(0) - p_* \int_0^x v'_* u'_* d\xi \right) \delta m dx,$$

которое удобно переписать в виде

$$\delta p_* = \int_0^1 g_f \delta m dx, \quad g_f(x) = \frac{\omega_*^2 u_* v_* - 2m u''_* v''_* + p_* v_*(0) u'_*(0) + p_* \int_0^1 u'_* v'_* d\xi}{\int_0^1 v_* \left( u'_* \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' dx}. \quad (2.8)$$

Функция  $g_f(x)$  представляет собой градиент критической нагрузки  $p_*$  по отношению к распределению массы  $m(x)$  в случае динамической потери устойчивости (флэттер). Эта функция характеризует чувствительность критической нагрузки к вариациям распределения массы стержня. Для вычисления градиента  $g_f(x)$  требуется знать лишь решения задач на собственные значения (2.1) и (2.3) в критической точке  $p_* = p_*^{\text{dyn}}$ .

Рассмотрим теперь случай  $p_* = p_*^{\text{stat}}$ , когда при некотором значении параметра  $p$  и распределении массы  $m(x)$  одно из собственных значений  $\omega^2$  обращается в нуль. Это соответствует статической потере устойчивости рассматриваемой системы. Уравнения, описывающие эту ситуацию, следуют из (2.1), (2.3), если в них положить  $\omega^2 = 0$ . Выражение для градиента критической нагрузки в случае статической потери

устойчивости выводится тем же способом, что и в случае флаттера. Функция  $g_d(x)$ , аналогичная функции  $g_f(x)$  (2.8), имеет вид

$$g_d(x) = \frac{-2m u''_* v''_* + p_* v_*(0)u'_*(0) + p_* \int_0^1 u'_* v'_* d\xi}{\int_0^1 v_* \left( u'_* \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' dx}. \quad (2.9)$$

Здесь критическому значению параметра  $p_* = p_*^{\text{stat}}$  соответствуют собственное значение  $\omega_*^2 = 0$  с собственными векторами  $u_*$  и  $v_*$ .

### 2.3. Оптимизационная процедура

Для построения приближений к оптимальному распределению массы в работе использовался метод проекции градиента [9].

Для произвольной вариации распределения массы  $\delta m(x)$ , удовлетворяющей изопериметрическому условию  $\int_0^1 \delta m(x) dx = 0$ , вариация критической нагрузки  $p_*$  принимает вид

$$\delta p_* = \int_0^1 (g(x) - \bar{g}) \delta m dx, \quad (2.10)$$

где  $g(x)$  — один из двух градиентов  $g_f(x)$ ,  $g_d(x)$ , а  $\bar{g}$  — некоторая константа.

Возьмем вариацию распределения массы в виде

$$\delta m = \alpha(x)(g(x) - \bar{g}), \quad (2.11)$$

где шаг по градиенту  $\alpha(x)$  — произвольная неотрицательная функция. Константа  $\bar{g}$  определяется из изопериметрического условия, которому должна удовлетворять вариация (2.11)

$$\bar{g} = \int_0^1 \alpha(x) g(x) dx \left[ \int_0^1 \alpha(x) dx \right]^{-1}.$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получим в первом приближении

$$\delta p_* = \int_0^1 \alpha(x) (g(x) - \bar{g})^2 dx \geq 0, \quad (2.12)$$

Из неравенства (2.12) следует, что вариация (2.11) вызывает монотонный рост функционала критической нагрузки при достаточно малом шаге  $\|\alpha\| \ll 1$ , который подбирается вычислителем.

Каждая итерация оптимизационной процедуры состоит из трех основных этапов. Сначала для данного распределения массы находится критическое значение  $p_*$  и устанавливается механизм потери устойчивости: флаттер или дивергенция. Для этого решаются исходная (2.1) и сопряженная (2.3) задачи на собственные значения при различных значениях параметра  $p$ . Затем вычисляется градиент  $g_f$  или  $g_d$  при  $p = p_*$  по формулам (2.8), (2.9). На последнем шаге вычисляется вариация распределения масс (2.11) и находится новое приближение

$$m^{k+1} = m^k + \delta m, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.13)$$

В качестве начального приближения принимается  $m^0(x) \equiv 1$ , что соответствует стержню с постоянным поперечным сечением.

### 2.4. Дискретизация и метод решения задач на собственные значения

Для того чтобы свести непрерывные задачи на собственные значения (2.1) и (2.3) к алгебраическим, воспользуемся следующим приемом. Сначала построим функционал  $I(u, v)$ , такой, что задача на минимум  $I$  эквивалентна задачам (2.1) и (2.3). Затем, следуя методу Бубнова — Галеркина, будем искать собственные векторы  $u$  и  $v$  в виде отрезков рядов по некоторым базисным функциям. Подставляя аппроксимации для  $u$  и  $v$  в  $I(u, v)$  и используя условия стационарности функционала, легко получить две алгебраические задачи на собственные значения, дающие приближенное решение задач (2.1) и (2.3).

Рассмотрим скалярное произведение  $(Lu, v)$ . После интегрирования по частям получим

$$I(u, v) = \int_0^1 \left( m^2 u'' v'' - p v(0) u'(0) - p u' v' \int_x^1 m(\xi) d\xi - m \omega^2 u v \right) dx. \quad (2.14)$$

Проварырем функционал  $I(u, v)$  по  $u, v$  и приравняем вариацию к нулю

$$\begin{aligned} \delta I(u, v) = & \int_0^1 \left( (m^2 u'')'' + p \left( u' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' - m \omega^2 u \right) \delta v dx + \\ & + (m^2 u'') \delta v' \Big|_{x=1} - (m^2 u'')' \delta v \Big|_{x=1} - (m^2 u'')' \delta v' \Big|_{x=0} + (m^2 u'')' \delta v \Big|_{x=0} + \\ & + \int_0^1 \left( (m^2 u'')'' + p \left( u' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' - m \omega^2 v \right) \delta u dx + \\ & + (m^2 v'') \delta u' \Big|_{x=1} - (m^2 v'')' \delta u \Big|_{x=1} - (m^2 v'' + p v)' \delta u' \Big|_{x=0} + (m^2 v'' + p v)' \delta u \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Видно, что стационарность функционала  $I(u, v)$  по отношению к произвольным гладким вариациям  $\delta u, \delta v$  эквивалентна задачам на собственные значения (2.1), (2.3). Свойство стационарности функционала (2.14) в комбинации с методом Бубнова – Галеркина или с методом конечных элементов дает простой способ дискретизации непрерывной задачи.

Будем искать решения задач (2.1), (2.3) в виде разложений по базисным функциям  $u_i(x), v_j(x)$  с коэффициентами  $\alpha_i, \beta_j$

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i(x), \quad v(x) = \sum_{j=1}^N \beta_j v_j(x). \quad (2.15)$$

В качестве базисных функций возьмем полиномы вида

$$\begin{aligned} u_1(x) &= v_1(x) = 1, \\ u_2(x) &= v_2(x) = x, \\ u_i(x) &= v_i(x) = 1 + c_{1i}x + \sum_{k=2}^{i+1} c_{ki}x^{k+2}, \quad i = 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Функции  $u_i(x), v_j(x)$  выбираются удовлетворяющими граничным условиям самосопряженной задачи, которая получается из (2.1) или (2.3) при  $p = 0$ . Кроме того требуется, чтобы базисные функции  $u_i(x), i = 3, \dots, N$  (и, соответственно,  $v_i(x)$ ) были взаимно ортогональны с весом  $m(x)$

$$\int_0^1 m u_i u_j dx = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 3, \dots, N$$

и удовлетворяли соотношениям

$$\int_0^1 m u_i dx = 0, \quad \int_0^1 m x u_i dx = 0, \quad i = 3, \dots, N.$$

Эти условия позволяют определить коэффициенты полиномов  $c_{ik}$ .

Заметим, что базисные функции отличаются для различных распределений масс. Поэтому необходимо вычислять  $u_i, v_i$  на каждом шаге оптимизационной процедуры. Приведем в качестве примера первые четыре базисные функции для  $m(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = 1, \\ u_2 &= v_2 = x, \\ u_3 &= v_3 = 1 - \frac{14}{3}x + \frac{70}{3}x^4 - 28x^5 + \frac{28}{3}x^6, \\ u_4 &= v_4 = 1 - 8x + 210x^4 - 504x^5 + 420x^6 - 120x^7. \end{aligned}$$

Подставляя разложения (2.16) в (2.15), получим дискретизацию функционала

$$I_d(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \beta_j F_{ji},$$

$$F_{ji} = \int_0^1 \left( m^2 u_i'' v_j'' - p v_j(0) u_i'(0) - p u_i' v_j' \int_x^1 m(\xi) d\xi - m \omega^2 u_i v_j \right) dx.$$

Условия стационарности  $\partial I_d / \partial \alpha_i = 0$ ,  $\partial I_d / \partial \beta_j = 0$  функционала  $I_d$  приводят к двум системам линейных уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_i, \beta_j$

$$\sum_{i=1}^N F_{ji} \alpha_i = 0, \quad j = 1, \dots, N; \quad \sum_{j=1}^N F_{ji} \beta_j = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

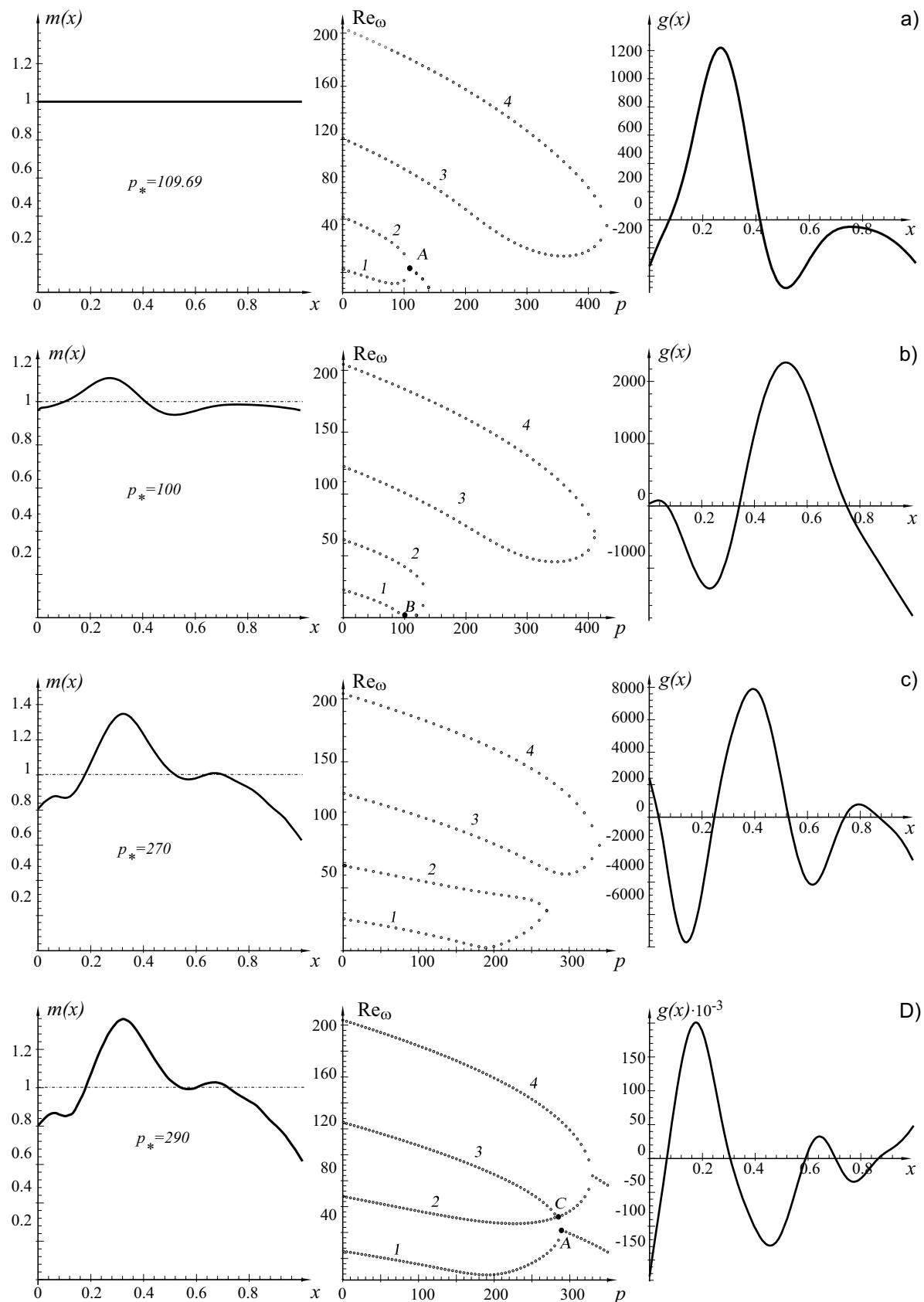
Заметим, что векторы  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  и  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$  являются правым и левым собственными векторами матрицы  $\mathbf{F}$  соответственно. Собственные числа  $\omega^2$  находятся из характеристического уравнения  $\det \mathbf{F} = 0$ . В вычислениях число  $N$  базисных функций выбиралось равным 7 или 8.

## 2.5. Численные результаты

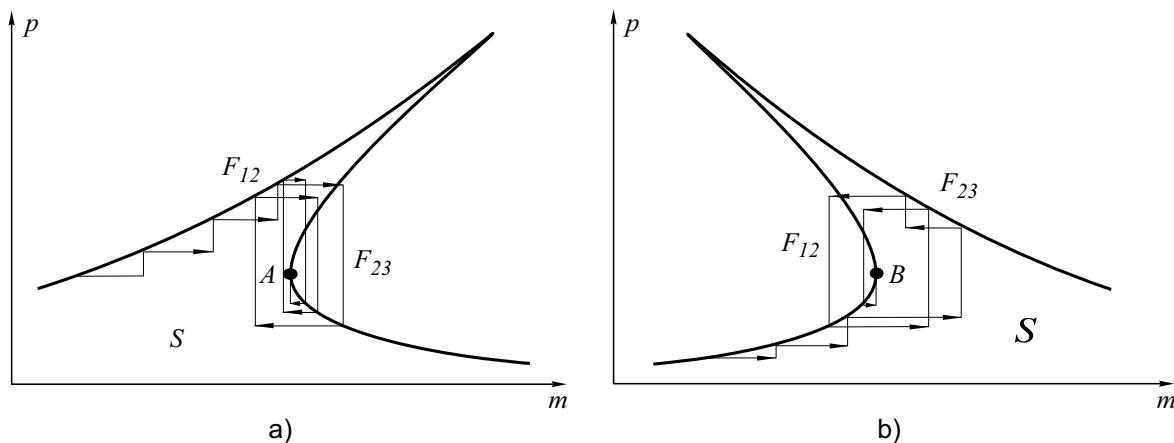
На рисунке 2,а приведены начальное распределение массы, а также соответствующие ему характеристические кривые и функция градиента. В этом случае система теряет устойчивость по флаттеру при  $p_* \approx 109.69$  (точка А на рис. 2,а). После нескольких итераций с использованием функции градиента  $g_f$ , сопровождающихся ростом  $p_*$ , приходим к распределению массы (рис. 2,б), при котором стержень теряет устойчивость статически при  $p_* \approx 100.0$  (точка В на рис. 2,б). Для увеличения предела статической устойчивости на следующих итерациях нужно использовать градиент  $g_d$  (2.9) при нахождении нового распределения масс по формулам (2.11), (2.13). Таким образом, ищется распределение массы, которое максимизирует минимальную из критических нагрузок флаттера и дивергенции.

Эволюция распределений массы, характеристических кривых и градиентов представлена на рисунках 2,б–д. Получающиеся в ходе итерационного процесса системы теряют устойчивость либо статически (точка В), либо динамически (точка А) в результате слияния первых двух частот изгибных колебаний (флаттер  $F_{12}$ ). Вместе с тем происходит постепенное сближение характеристических кривых 2 и 3, соответствующих второй и третьей изгибным частотам. В ходе оптимизации критическое значение следящей силы, отвечающее флаттеру  $F_{12}$ , монотонно растет, достигая в максимуме значения  $p_* \approx 290.0$ . Следующая итерация приводит к катастрофе, выражющейся в скачкообразном падении критического параметра нагрузки за счет слияния второй и третьей частот (флаттер  $F_{23}$ ). Дальше процесс оптимизации строится так, чтобы максимизировать наименьшую из критических нагрузок, соответствующих флаттеру  $F_{12}$  или  $F_{23}$ . В результате градиентный метод сходится к распределению масс (рис. 2,д), которое характеризуется пересечением частотных кривых в точке С и катастрофическим ростом градиента в этой точке (ср. масштабы на рис. 2,а–д).

Для объяснения описанного характера итерационного процесса можно предположить, что поверхность, разделяющая область устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров устроена так, что существует касательная плоскость, параллельная оси  $p$  в найденной точке. Рисунок 3,а иллюстрирует механизм описанной катастрофы на примере системы с двумя параметрами  $(p, m)$ . Из-за того, что кривая, разделяющая область устойчивости  $S$  и флаттера  $F_{12}, F_{23}$ , имеет характерный изгиб, итерационный процесс, изображенный на рис. 3,а, сходится к точке А, в которой наблюдается катастрофический рост вектора градиента. Точка А соответствует точка пересечения частотных кривых в ситуациях, подобных изображенной на рис. 2,д.



**Рис. 2** Эволюция распределения массы и характеристических кривых: а —  $p_* = 109.69$ , б —  $p_* = 100.00$ , в —  $p_* = 270.00$ , г —  $p_* = 290.00$ .



**Рис. 3** Изгиб границы области устойчивости, отвечающий за возникновение точки пересечения характеристических кривых.

### 3. Задача об оптимальном распределении неконструктивной массы вдоль стержня с постоянным поперечным сечением

#### 3.1. Формулировка задачи оптимизации

Рассмотрим стержень с постоянным поперечным сечением, несущий неконструктивную массу. Безразмерная задача на собственные значения получается в этом случае из (1.4), где  $\sigma(x) \equiv 1$ . Погонная масса стержня теперь постоянна, а распределение неконструктивной массы зависит от  $x$ . Таким образом, распределение общей массы системы  $m(x)$  представляется в виде

$$m(x) = 1 + \frac{\kappa}{\kappa + 1} \mu(x), \quad \int_0^1 \mu(x) dx = 1, \quad (3.1)$$

где параметр  $\kappa = M_{nm}/M$  выражает долю неконструктивной массы  $M_{nm}$  в общей массе системы  $M = M_b + M_{nm}$ . Учитывая (3.1), приходим к задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} Lu &= u'''' + p(1 - \kappa) \left( u' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' - m \omega^2 u = 0, \\ u'' \Big|_{x=0} &= 0, \quad u''' \Big|_{x=0} = 0, \\ u'' \Big|_{x=1} &= 0, \quad u''' \Big|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Мы будем предполагать, что допустимые распределения неконструктивной массы  $\mu(x)$  являются ограниченными функциями ( $0 \leq \mu(x) \leq \mu_{up}$ ). Практически это означает, что масса груза, приходящаяся на единицу длины стержня, не должна превосходить заданной величины.

Задача об оптимальном размещении груза заданной массы вдоль стержня может быть сформулирована следующим образом

$$\begin{aligned} p_*(\mu) &\rightarrow \max_{\mu \in \Omega}, \\ \Omega &= \left\{ \mu(x) : \int_0^1 \mu(x) dx, 0 \leq \mu(x) \leq \mu_{up}, x \in [0, 1] \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь, как и в пункте 2, функционалом качества является  $p_* = \min\{p_*^{dyn}, p_*^{stat}\}$ .

Еще до решения задачи (3.3) можно сделать некоторые общие выводы о свойствах оптимальных распределений  $\mu(x)$  на основе принципа максимума Понтрягина. Для этого, вводя обозначения  $u_1 = u$ ,  $u_5 = \int_x^1 m(\xi) d\xi$ , запишем задачу на собственные значения (3.2) в виде системы дифференциальных уравнений

в форме Коши:

$$\begin{cases} u'_1 = u_2, \\ u'_2 = u_3, \\ u'_3 = u_4, \\ u'_4 = -p(1-\kappa)u_3u_5 + (p(1-\kappa)u_2 + \omega^2u_1)m, \\ u'_5 = -m, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$u_2(0) = u_2(1) = 0, \quad u_3(0) = u_3(1) = 0, \quad u_5(1) = 0.$$

Если в задаче оптимизации (3.3) выразить  $\mu$  через  $m$ , то она совместно с (3.4) может быть трактована как задача оптимального управления, где “управлением” является распределение массы  $m(x) = 1 + \kappa/(1 + \kappa)\mu(x)$ . Поскольку “управление”  $m$  входит в правые части системы (3.4) линейно и является ограниченным сверху и снизу (т. к.  $0 \leq \mu(x) \leq \mu_{\text{up}}$ ), то из принципа максимума Понтрягина [7] следует, что в этом случае оптимальные решения  $m(x)$  являются релейными функциями. Следовательно, релейными функциями будут и оптимальные распределения неконструктивной массы  $\mu(x)$  в задаче оптимизации (3.3).

Общая схема решения задачи (3.3) остается такой же, как и в пункте 2. Модифицируется только способ построения улучшающей вариации  $\delta\mu(x)$ , поскольку оптимальные решения, как было показано выше, уже не являются непрерывными функциями.

### 3.2. Градиент функционала критической нагрузки

Градиент критической нагрузки по отношению к вариациям распределения неконструктивной массы  $\mu$  в случае динамической потери устойчивости определяется по формуле

$$g_f(x) = \frac{\omega_*^2 u_* v_* + p_*(1-\kappa)v_*(0)u'_*(0) + p_*(1-\kappa) \int_0^x u'_* v'_* d\xi}{(1-\kappa) \int_0^1 v_* \left( u'_* \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' dx}, \quad (3.5)$$

а в случае статической потери устойчивости имеет вид

$$g_d(x) = \frac{p_* v_*(0)u'_*(0) + p_* \int_0^x u'_* v'_* d\xi}{\int_0^1 v_* \left( u'_* \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' dx}, \quad (3.6)$$

Обе формулы (3.5) и (3.6) получены способом, описанным в пункте 2. Условие динамической потери устойчивости (2.7) остается прежним.

### 3.3. Дискретизация и метод решения задач на собственные значения

Задача на собственные значения (3.2) может быть сведена к вариационной задаче, как это описано в пункте 2. В данном случае сопряженная задача и минимизируемый функционал имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} L^*v &= v'''' + p(1-\kappa) \left( v' \int_x^1 m(\xi) d\xi \right)' - m\omega^2v = 0, \\ (v'' + p v)|_{x=0} &= 0, \quad (v'' + p v)'|_{x=0} = 0, \\ v''|_{x=1} &= 0, \quad v'''|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$I(u, v) = \int_0^1 \left\{ u''v'' - p v(0)u'(0) - p(1-\kappa)u'v' \int_x^1 m(\xi) d\xi - m\omega^2u v \right\}. \quad (3.8)$$

В разложениях собственных функций  $u, v$  по Бубнову – Галеркину используется полиномиальный базис (2.17).

### 3.4. Оптимизационная процедура

Оптимизационная процедура, как и прежде, строится на основе метода проекции градиента. Для построения вариации неконструктивной массы  $\mu$ , являющейся ограниченной функцией, удобно использовать метод последовательной линеаризации, описанный Р. П. Федоренко [8].

Пусть  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$  обозначает дискретную аппроксимацию распределения неконструктивной массы  $\mu(x)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_N)$  — дискретизация вариации  $\delta\mu$ . Тогда приращение функционала критической нагрузки  $\delta p_*$  запишется в виде  $\sum_{k=0}^{N-1} (s_{k+1} \int_{kh}^{(k+1)h} g(x))$ , где  $h = 1/N$  — шаг дискретизации, а  $g(x)$  — один из градиентов  $g_f(x), g_d(x)$ . В результате нахождение вариации распределения неконструктивной массы сводится к решению задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \left( s_{k+1} \int_{kh}^{(k+1)h} g(x) \right) &\rightarrow \max_{\{s_n\}}, \\ -\mu_n \leq s_n \leq \mu_{\text{up}} - \mu_n, \quad \sum_{n=1}^N s_n &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Очередное приближение к оптимальному распределению находится из соотношения

$$\mu_i^{k+1} = \mu_i^k + \alpha s_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

где  $\alpha \in [0, 1]$  выбирается вычислителем.

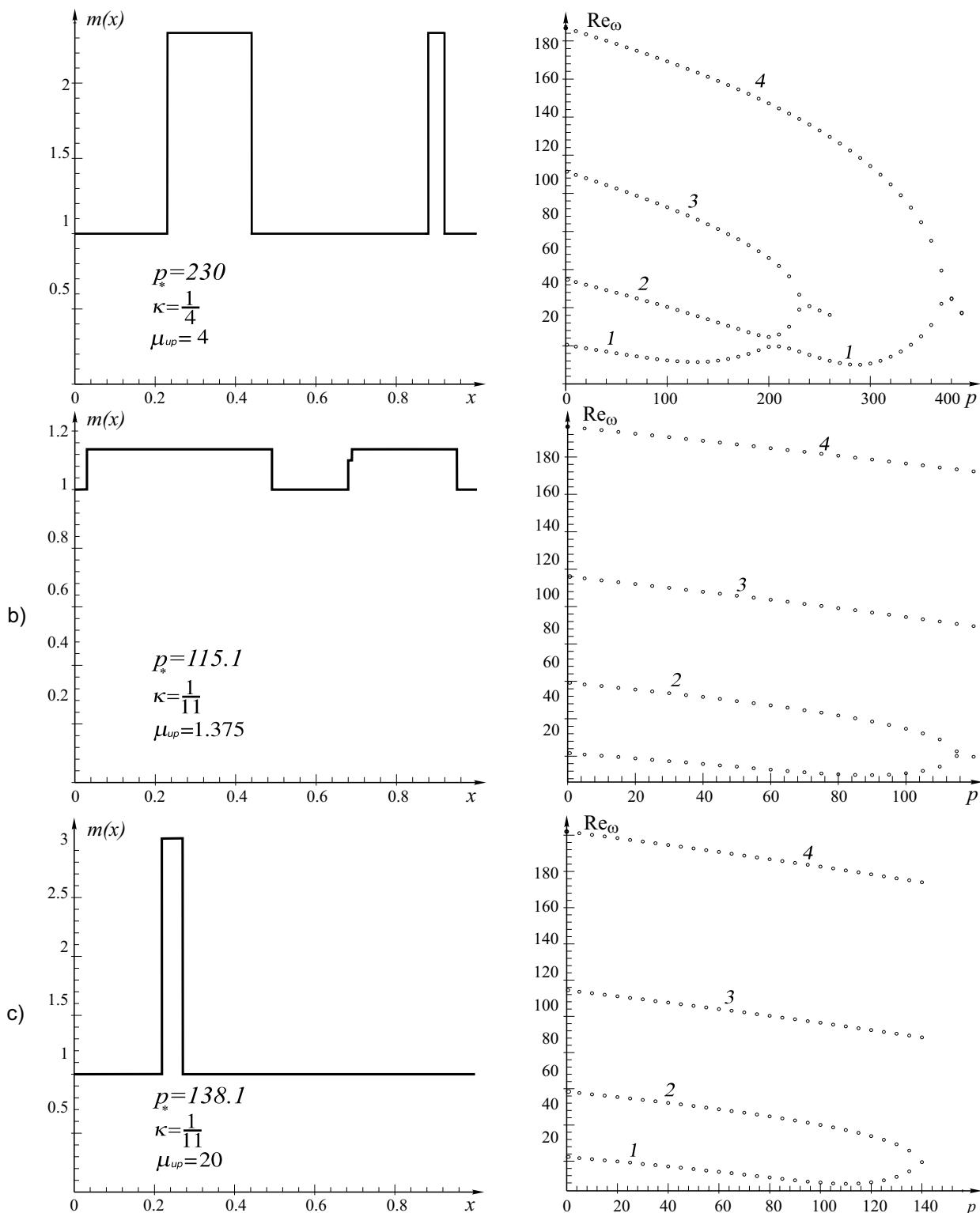
Каждая итерация оптимизационной процедуры, как и ранее, состоит из трех основных шагов. На первом шаге для данного распределения массы  $\mu$  вычисляется критическая нагрузка  $p_*$  и устанавливается механизм потери устойчивости: флаттер или дивергенция. Для этого решаются исходная (3.2) и сопряженная (3.7) задачи при различных значениях параметра  $p$ . Затем вычисляется градиент критической нагрузки  $g_f(x)$  или  $g_d(x)$  по формулам (3.5), (3.6). На последнем шаге находится улучшающая вариация распределения массы путем решения задачи линейного программирования (3.9) и вычисляется очередное приближение. В качестве начального распределения выбирается  $\mu^0(x) \equiv 1$ . В вычислениях отрезок  $[0, 1]$  разбивался на  $N = 100$  частей.

### 3.5. Численные результаты

На рисунке 4 представлены оптимальные распределения неконструктивной массы и соответствующие им характеристические кривые, построенные для различных значений параметров  $\mu_{\text{up}}$  и  $\kappa$ .

В случае  $\kappa = 1/4$  и  $\mu_{\text{up}} = 4$  оптимизационная процедура сходится к распределению с четырьмя точками переключения, показанному на рис. 4,а. Итерационный процесс протекает здесь по сценарию, схожему с описанным в пункте 2. После монотонного роста критической нагрузки, соответствующей слиянию первых двух частот (кривые 1 и 2 на рис. 4,а), происходит ее скачкообразное увеличение в результате слияния второй и третьей частот (кривые 2 и 3 на рис. 4,а). Итерационный процесс, максимизирующий минимальную из критических нагрузок, вызывающих флаттер  $F_{12}$  или  $F_{23}$ , сходится к распределению, характеризующемуся наличием точки пересечения частотных кривых 1 и 2, аналогичной точке С на рис. 2,д. При этом происходит перестройка картины поведения характеристических кривых от той, где сливаются первая частота со второй, к той, где сливаются вторая частота с третьей, и наоборот. Изображенное на рис. 4,а распределение очень близко к оптимальному, поскольку перестройка характеристических кривых “только что произошла”. Рисунок 3,б поясняет на примере системы с двумя параметрами  $(p, m)$  характер описанного итерационного процесса. Точка В на рис. 3,б соответствует точке пересечения частотных кривых. Как и в пункте 2, перестройка характеристических кривых может быть объяснена особым строением поверхности, разделяющей области устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров.

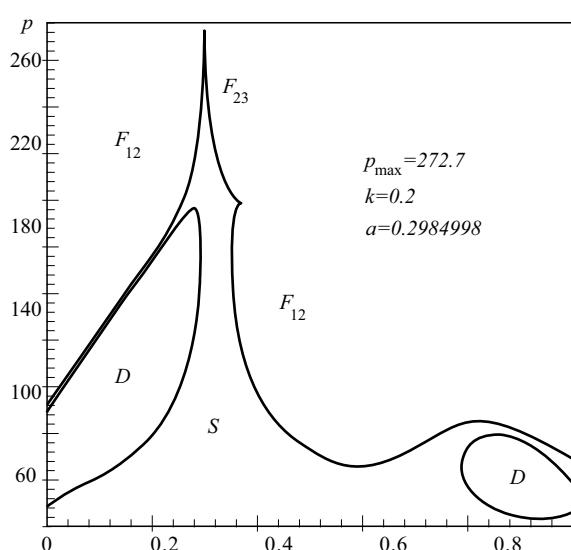
На рис. 4,б,с представлены оптимальные распределения для  $\kappa = 1/11$ , отличающиеся только значениями  $\mu_{\text{up}}$ . Распределение с четырьмя точками переключения соответствует  $\mu_{\text{up}} \approx 1.375$  (рис. 4,б) (маленькая ступенька на рисунке вызвана погрешностью вычислений). При этом флаттерная критическая нагрузка составляет  $p_* \approx 115.1$ . Если позволить размещать груз более плотно ( $\mu_{\text{up}} = 20$ ), то оптимальным станет распределение с двумя точками переключения (рис. 4,д). В этом случае также происходит динамическая потеря устойчивости при  $p_* \approx 138.1$ .



**Рис. 4** Оптимальные распределения неконструктивной массы и соответствующие им характеристические кривые: а –  $p_*=230$ ,  $\kappa=1/4$ ,  $\mu_{up}=4$ , б –  $p_*=115.1$ ,  $\kappa=1/11$ ,  $\mu_{up}=1.375$  в –  $p_*=138.1$ ,  $\kappa=1/11$ ,  $\mu_{up}=20$ .

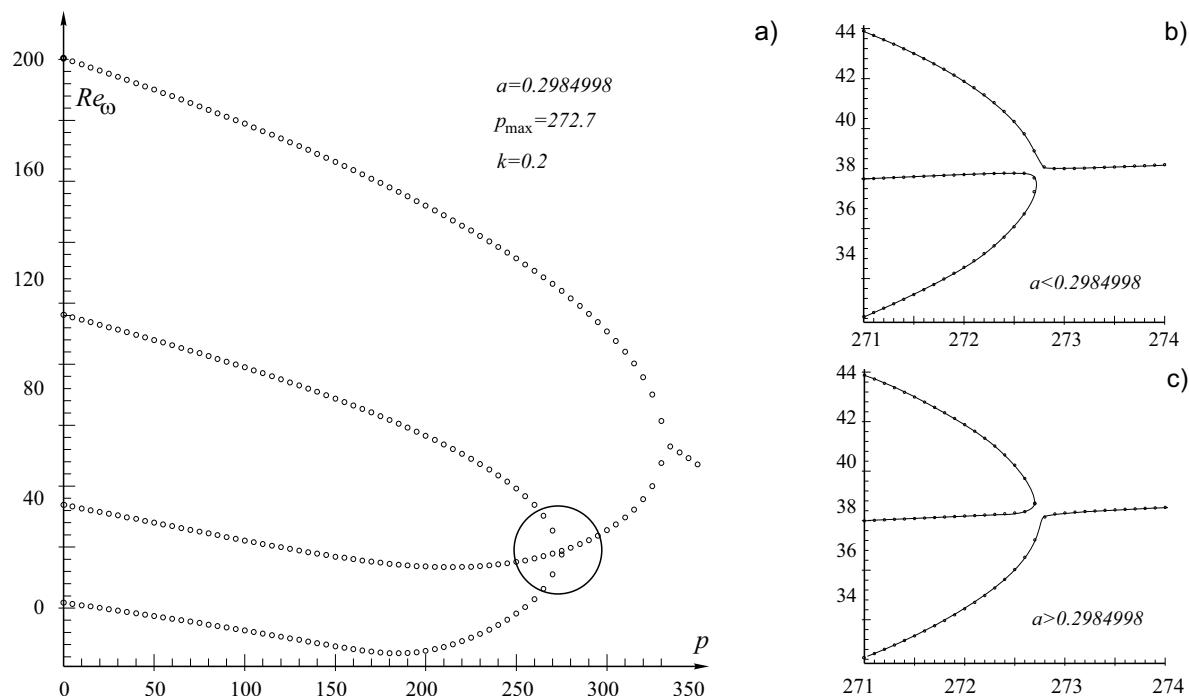
#### 4. Задача об оптимальном расположении точечной массы на однородном стержне

Исходя из результатов пункта 3 можно предположить, что при фиксированном  $\kappa$  с увеличением  $\mu_{up}$  последовательность финитных функций распределения  $\mu(x)$  сойдется к  $\delta$ -функции Дирака. В результате возникает задача об оптимальном расположении материальной точки заданной массы  $\kappa$  на стержне, сводящаяся



**Рис. 5** Диаграмма устойчивости в задаче об оптимальном расположении точечной массы вдоль однородного стержня.

Точке максимума соответствует слияние трех простых вещественных собственных чисел в одно трехкратное (рис. 6, а). Если фиксировать  $p = p_{\max}$ , то при малом шевелении параметра  $a$  трехкратное собственное значение распадается на два комплексно-сопряженных и одно вещественное (рис. 6, б, в). Таким образом, при  $a < a_{\max}$  мы попадаем в область флаттера  $F_{12}$ , соответствующую слиянию первой и второй собственных частот, а при  $a > a_{\max}$  — в область флаттера  $F_{23}$ , где сливаются вторая и третья собственные частоты. Если же фиксировать  $a = a_{\max}$  и пошевелить параметр  $p$  в окрестности точки максимума, то при  $p < p_{\max}$  трехкратное собственное значение распадается на три вещественных, что соответствует области устойчивости, а при  $p > p_{\max}$  — на одно вещественное и два комплексно-сопряженных (флаттер). Следовательно, вектор вариации параметров, выпущенный из точки максимума вертикально вниз вдоль оси  $p$ , лежит в области устойчивости.



**Рис. 6** Трехкратное собственное значение и его распад при вариациях параметров.

к поиску максимума функции  $p_*(a)$ , где  $a$  — координата груза, отсчитываемая от точки приложения следящей силы. Уравнения (3.2) описывают задачу на собственные значения для этого случая, если в (3.1) положить  $\mu(x) = \delta(x - a)$ .

На рисунке 5 представлена диаграмма устойчивости в плоскости параметров  $(a, p)$  при фиксированном  $\kappa = 0.2$ . Из рисунка видно, что сделать систему более устойчивой можно, размещая точечную массу в пределах только очень узкого промежутка  $a \in [0.25, 0.4]$ . Граница между областью устойчивости  $S$  и областями флаттера  $F$  и дивергенции  $D$  имеет особенности. Максимальное значение критического параметра  $p_{\max} \approx 272.7$  достигается как раз на одной из них. Точечная масса при этом находится на расстоянии  $a_{\max} \approx 0.2984998$  от точки приложения следящей силы.

На рисунке 6 показано поведение характеристических кривых в точке максимума и ее окрестности.

Особенности границ областей устойчивости, флаттера и дивергенции для неконсервативных систем исследовал А. П. Сейранян [11]. Одной из особенностей общего положения, возникающих на границе области устойчивости двухпараметрических циркуляционных систем, является полукубическая точка возврата. Ей соответствует трехкратное вещественное собственное значение с жордановой клеткой третьего порядка, распадающееся при вариациях параметров на три простых вещественных, если вектор вариации выпущен вдоль общей касательной к двум ветвям кривой, или на одно вещественное и два комплексно-сопряженных собственных значения во всех остальных случаях.

Таким образом, максимальное значение критического параметра  $p_*$  достигается в особой точке границы устойчивости — полукубической точке возврата, являющейся особенностью общего положения для двухпараметрических неконсервативных систем. Исследовавшие ранее задачу об оптимальном расположении точечной массы вдоль однородного стержня авторы работ [5] и [6] не смогли обнаружить трехкратное собственное значение из-за того, что следили лишь за поведением первых двух частот изгибных колебаний.

## Литература

1. Гопак К. Н. Потеря устойчивости свободным стержнем, ускоренно движущимся под действием следящей силы // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и Машиностроение. 1960. № 4. С. 136–137.
2. Феодосьев В. И. Об одной задаче устойчивости // Прикладная математика и механика. Вып. 2. 1965. С. 391–392.
3. Beal T. R. Dynamic Stability of a Flexible Missile under Constant and Pulsating Thrusts // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. P. 486–494.
4. Горощко О. А. Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета. Киев: Наукова думка, 1965. С. 46–54.
5. Sundararajan C. Optimization of a Nonconservative Elastic System with Stability Constraint // Journal of Optimization Theory and Applications. 1975. Vol. 16. Nos. 3/4. P. 355–378.
6. Park Y. P. & Mote C. D. The Maximum Controlled Follower Force on a Free-free Beam Carrying a Concentrated Mass // Journal of Sound and Vibration. 1985. 98(2). P. 247–256.
7. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкrelidze Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 384 с.
8. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
9. Сейранян А. П., Шаранюк А. В. Чувствительность и оптимизация критических параметров в задачах динамической устойчивости // Механика твердого тела. 1983. № 5. С. 174–183.
10. Pedersen P., Seyranian A. P. Sensitivity analysis for problems of dynamic stability // Int. J. Solids Struct. 1983. Vol. 19. P. 315–335.
11. Сейранян А. П. О границах областей устойчивости, флаттера и дивергенции. Москва, 1995. (Препр. / Институт механики МГУ; № 11–95).

■ Статья поступила в редакцию 18 декабря 1998 года; в окончательном варианте — 23 марта 1999 года.